RdPHNs: RdPs colorés

2ème année GLSD

2016-2017

(1)

Réseaux de Petri Colorés

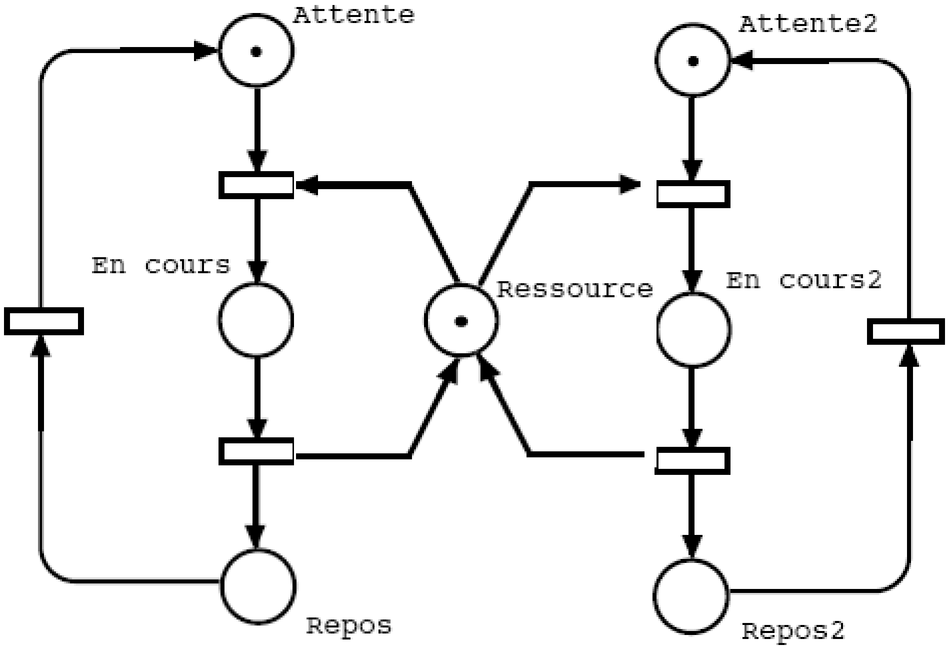
Motivation des RdPs colorés

- Pour avoir plus d’expressivité;
- Pour avoir des modèles plus compacts pour des systèmes encore large (factorisation);
- Rendre la tâche de modélisation plus facile grâce à un modèle plus abstrait que celui des RdP

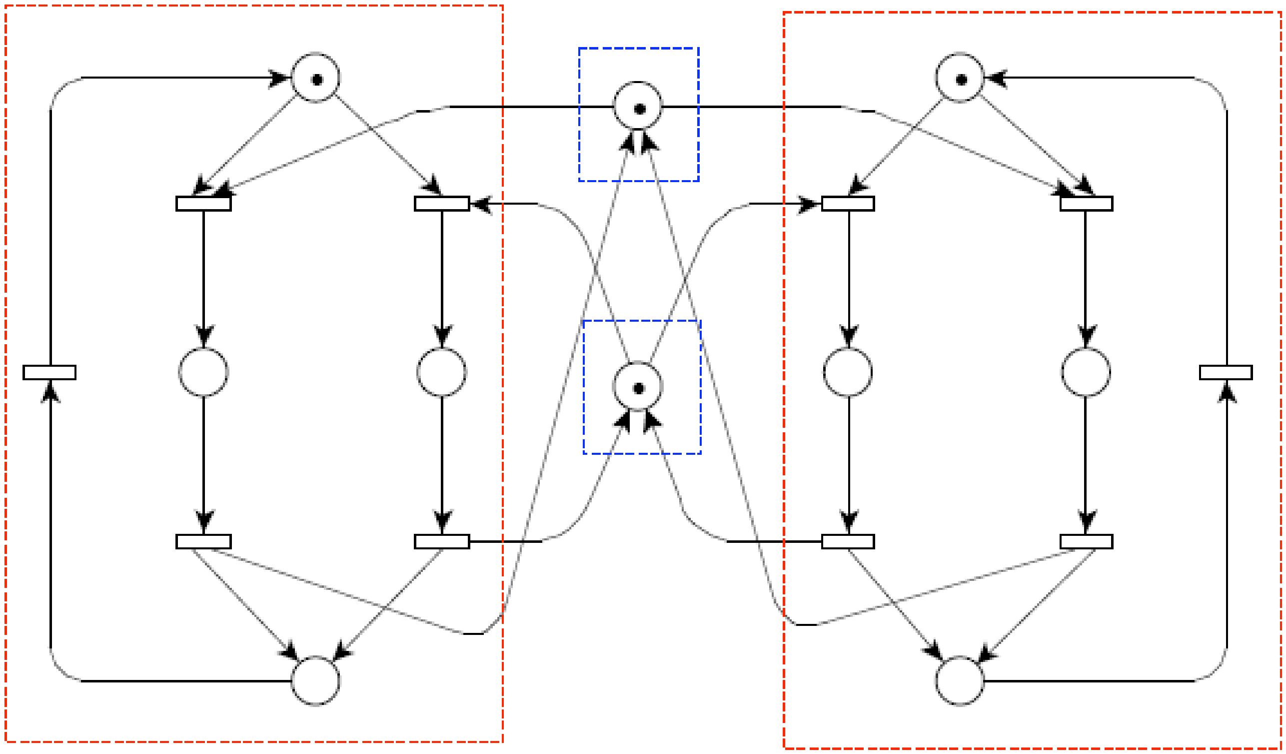
Motivation des RdPs colorés

- Exemple: rappellons le RdP du problème d’exclusion mutuelle de 2 processus sur une ressource partagée

Motivation des RdPs colorés



Motivation des RdPs colorés



2 processus et 2 ressources

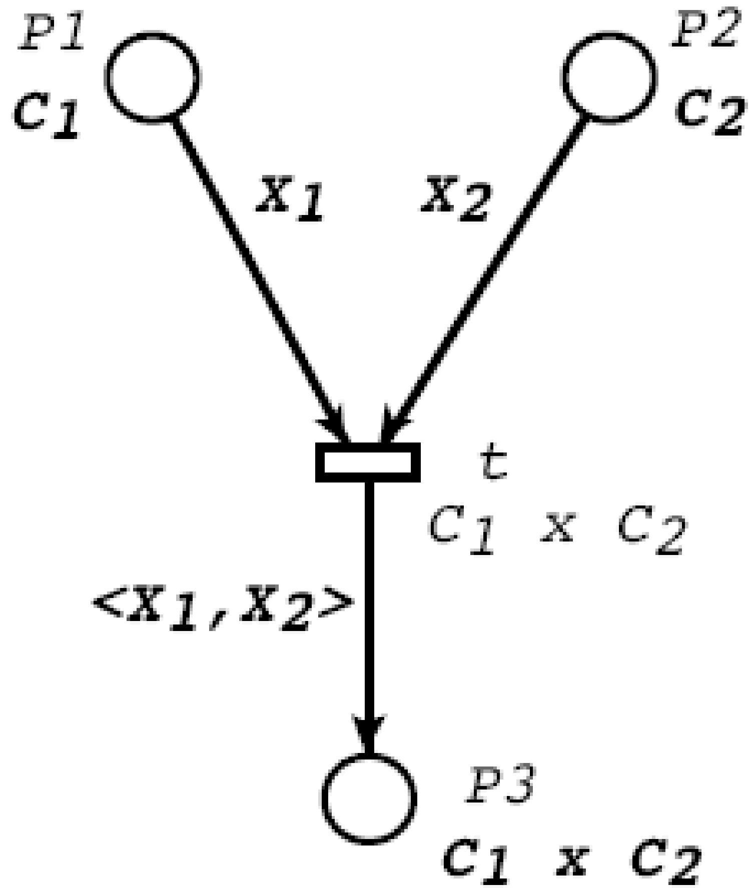
Limites des RdPs

- Principalement non paramétrable;
- Pas d’idée sur l’aspect symétrique (souvent inhérents aux systèmes)

Idée des RdPs colorés

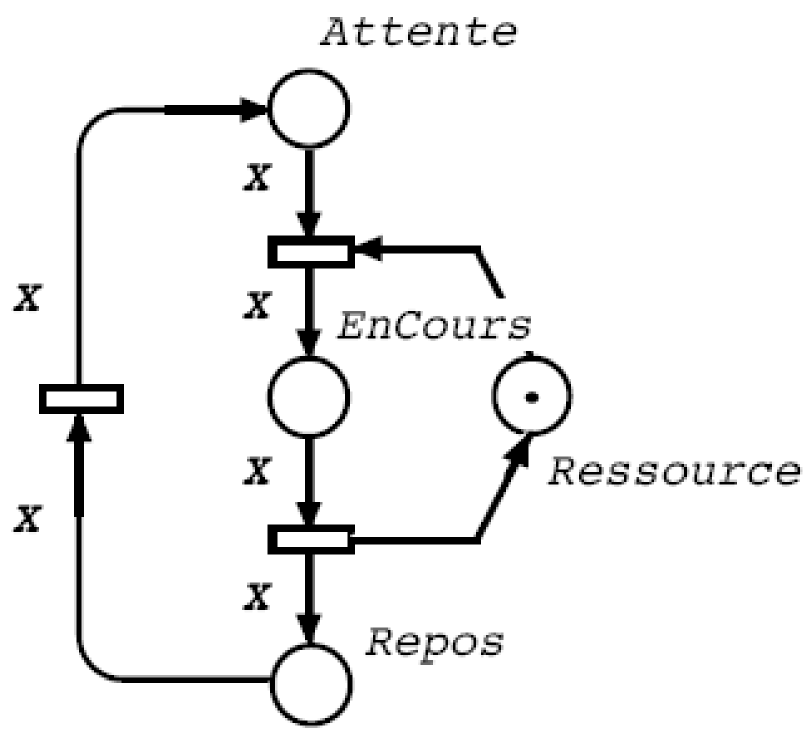
- **Chaque place p** est caractérisée par un **domaine de couleur C(p)**
- **Un jeton** d’une place p est **un élément de C(p)**
- **Chaque transition t** est caractérisée par **un domaine de couleur C(t)**
- Le domaine de couleur d’une transition caractérise la **signature de cette transition**
- Les **fonctions de couleur** sur les arcs déterminent **les instances de jetons nécessaires**, consommées et produites lors du franchissement d’une transition

Un premier exemple de RdP coloré



Exemple 2 des RdPs colorés

Exclusion Mutuelle:



1) Proposer des types pour les places.
2) Proposer une signature pour la fonction X

Formellement

- Multi-ensemble (multi-set)
- Réseau de Petri coloré
- Instanciation (binding)
- Élément jeton (token element)
- Étape: sensibilité; tirage

Multi-ensemble

- Soit S un ensemble;
- Un multi-ensemble sur S noté m est une fonction défini comme suit:

$$m:S \rightarrow N$$

- Cette fonction peut être aussi represetée sous la fomre de la somme:

$$\sum_{s \in S} m(s)`s.$$

- Par S_{MS}, on note l'ensemble de tous les multi-ensemble sur S

Multi-ensemble: Exemple

- Pour S={1, 2, 3, 4}
- On peut avoir le multi-ensemble:

m(S)={1,1, 2, 3, 3, 3, 3, 3, 4}

= {2’1, 1’2, 5’3, 1’4}

= 2’1+1’2+5’3+1’4

S_{MS} est un ensemble ifini

Multi-ensemble: Opérations

Pour *m1, m2, m* trois multi-ensembles et n un entier:

(i) $m_1 + m_2 = \sum_{s \in S} (m_1(s) + m_2(s))`s$

(ii) $n * m = \sum_{s \in S} (n * m(s))`s$

(iii) $m_1 \neq m_2 = \exists s \in S: m_1(s) \neq m_2(s)$

$m_1 \leq m_2 = \forall s \in S: m_1(s) \leq m_2(s)$

(iv) $|m| = \sum_{s \in S} m(s)$

(v) $m_2 - m_1 = \sum_{s \in S} (m_2(s) - m_1(s))`s$

Formellement: RdP coloré

Un RdP coloré est un 9-uplet

CPN = (S, P, T, A, N, C, G, E, I), où:

1. S :un ensemble non vide de **types, dit ensemble de couleurs.**
2. P :un ensemble fini de **places.**
3. T : un ensemble fini de **transitions.**
4. A : un ensemble fini d'**arcs telque:**

   $$P \cap T = P \cap A = T \cap A = \emptyset.$$

5. N : une fonction Noeud:

   définie de A dans P*T∪T*P.

Formellement: RdP coloré

Un RdP coloré est un 9-uplet **CPN = (S, P, T, A, N, C, G, E, I),** où:

6. C : Une fonction **couleur, définie de P dans S.**
7. G : Une fonction “***guard*”**, définie de **T** dans **Expressions** tel que:
   Pour tout t $\in$T: [Type(G(t)) = Bool et Type(Var(G(t))) $\in$ S].
8. E : Une fonction “***arc expression*”,** définie de **A** dans **expressions,** tel que:
   Pour tout a $\in$ A: [Type(E(a)) = $C(p)_{MS}$ et Type(Var(E(a))) $\in$ S]
   Où p est la place dans N(a).
9. I : Une fonction d’initialisation, définie de **P** dans l’ensemble des **expressions clos**:
   Pour tout p $\in$ P: [Type(I(p)) = $C(p)_{MS}$].

Formellement: Instanciation

- Soit ***Exp*** une expression définie sur un ensemble de variable ***V***;

- Une instanciation ***I*** pour l'ensemble de variable ***V*** est une fonction définie pour chaque variable dans ***V***.

- L'application d'une instanciation à ***Exp*** consiste à remplacer toute occurrence d'une variable ***v*** de ***V*** dans ***Exp*** par ***F(v)***. On note ceci par ***Exp<I>***.

Formellement: Instanciation (exemple)

Pour:

- Var={X, Y, Z}
- I(X)=2, I(Y)=6, I(Z)=4
- Exp= X+2-Y*Z

Donc Exp<I>=2+2-6*4

Formellement:

Instanciation appliquée à une transition

Une instanciation (binding) ***b*** pour une transition ***t***, est une fonction définie comme suit:

- Pour toute variable ***v*** de ***Var(t)***, nous avons: $\boldsymbol{b(v) \in type(v)}$
- L'instanciation ***b*** satisfait ***G(t),*** et on note ceci par: ***G(t)<b>***

Formellement:

Instanciation appliquée à une transition

- Remarque: le nombre d’instanciation est infini, et l’ensemble de toutes les instanciations possibles pour la transition *t* est noté: **B(t)**.

Formellement:

élément jeton (token element)

- Un **élément jeton** est un couple ***(p, c)*** où ***p*** est une place est ***c*** $\in$***C(p).***

Exemple: (p1, 4), (p1, “aa”), (p2, “libre”), …
peuvent représenter des éléments jetons,

- On note par ***TE*** l’ensemble de tous les éléments jetons

Formellement:

élément instanciation (binding element)

- Un **élément instanciation** est un couple ***(t, b)*** où ***t*** est une transition est ***b*** $\in$***B(t).***

Exemple: (t1, <x$\leftarrow$1, y$\leftarrow$2>), (t2, <x$\leftarrow$2, a$\leftarrow$"x">), … peuvent représenter des éléments instanciaitons,

- On note par ***BE*** l'ensemble de tous les éléments instanciations

Formellement:

marquage (marking) et étapes (steps) …1

- Un marquage: est un multi-ensemble sur ***TE***.

$$\boldsymbol{M: TE \rightarrow N}$$

exemple: (p1, 2)++(p2, 6)++(p2, 9)++3’(p3, “a”)

- Une étape: un multi-ensemble fini non vide sur ***BE***.

$$\boldsymbol{Y: BE \rightarrow N}$$

Exemple: (t1, <x=2, y=5>)+2’(t2, <x=5, y=9, a=“d”>)

Formellement:

marquage (marking) et étapes (steps) ...2

Remarque:

Le marquage intial M_0 est donc la fonction (ou le multi-ensemble) qui doit satisaire:

Pour tout (*p,c*) $\in$*TE: M$_0$(p,c) = (I(p))(c).*

Formellement:

Condition de franchissement d'une étape

Une étape $\boldsymbol{Y}$ est franchissable dans un marquage $\boldsymbol{M_1}$ ssi:

Pour tout ***p de P:***

$$\Sigma_{(p,t)\in Y}\, E(p,t)<b> \;<= M_1(p)$$

Dans ce cas, Y peut être tirée depuis ***M1*** et son tirage mène vers un nouveau marquage $\boldsymbol{M_2}$ défini par:

Pour tout ***p*** de ***P***:

$$M_2(p) = (M1(p) - \Sigma_{(t,b)\in Y} E(p,t)<b>) + \Sigma_{(t,b)\in Y} E(t,p)<b>.$$

Ceci est noté par: $\boldsymbol{M_1[Y>M_2}$

Formellement:

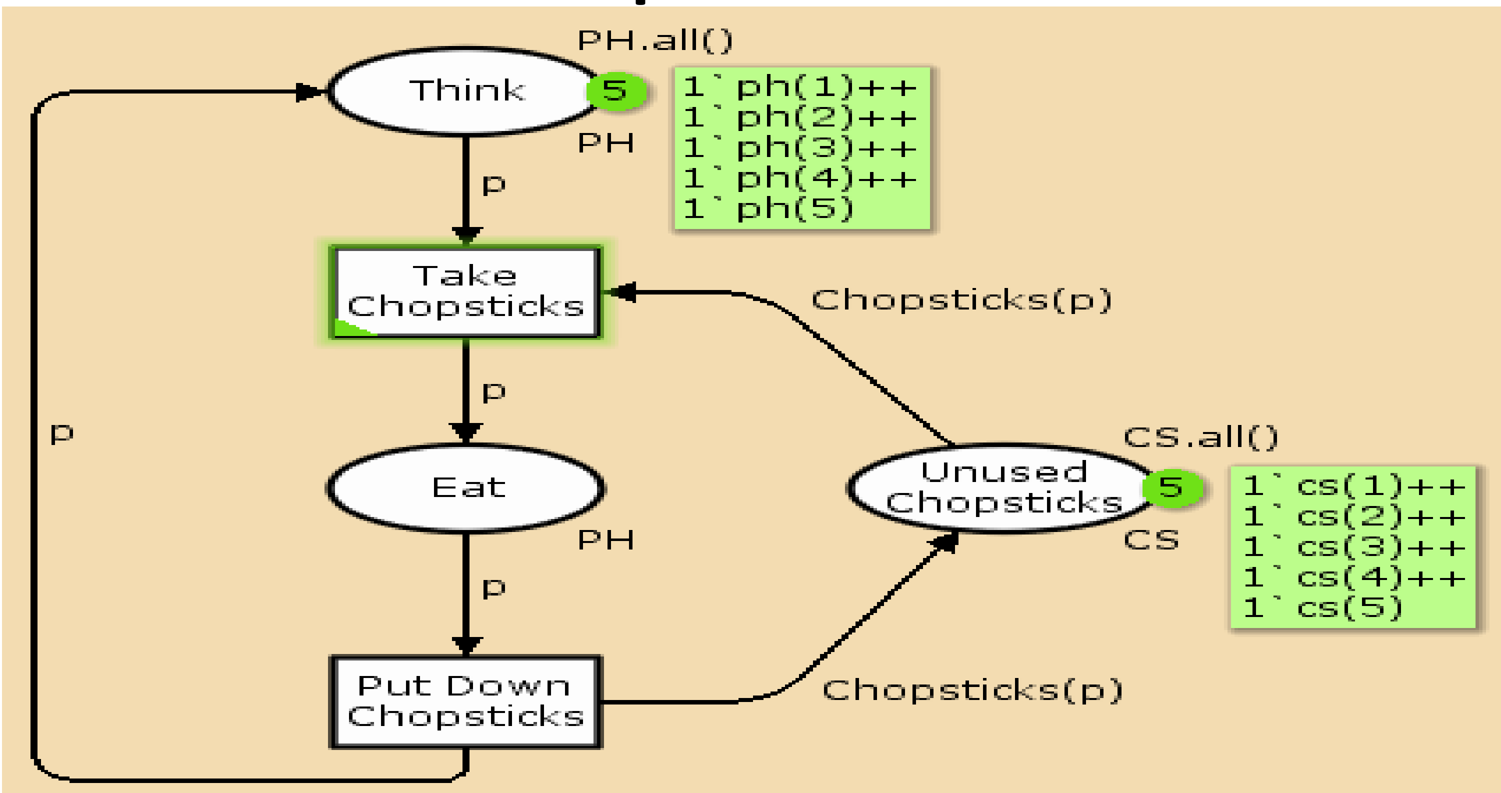
Séquence de franchissement

Une séquence de franchissement est une suite de marquages telque:

$$\boldsymbol{M_1[Y_1>M_2[Y_2>M_3[Y_3>M_4[Y_4>\ldots}$$

Une telle séquence peut être finie ou infinie

Exemple de RdPC




```
Declarations
▼val n = 5;
▼colset PH = index ph with 1..n;
▼colset CS = index cs with 1..n;
▼var p: PH;
▼fun Chopsticks(ph(i)) =
  1`cs(i) ++ 1`cs(if i=n then 1 else i+1);
```