Université de Biskra
Département d'informatique

Niveau: M1(IA)

Matière: MPES
Chragé de matière: L. Kahloul
TD3: Chaîne de Markov

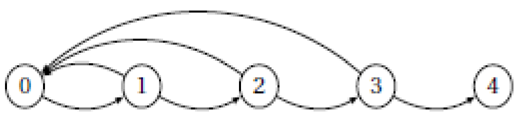
Exercice 1. *Matrice et graphe de transitions.. .*

La solution est donné dans la séance.

Exercice 2. *marche aléatoire. .*
Soit S_n la suite de variables aléatoires définie comme : $S_n = S_0 + \Sigma_{k=1}^{n} Z_k$, tel que : $S_0 \in \mathbb{Z}$ et Z_n est une variable aléatoire tel que : $P(Z_n = 1) = P(Z_n = -1) = 1/2$. En effet, S_n décrit une marche aléatoire linéaire.

1. Identifier les différents états de la suite S_n: à partir de l'expression: $S_n = S_0 + \Sigma_{k=1}^{n} Z_k$, on voit que $S_1 = S_0 + Z_1$ donc $S_1 = S_0 + 1$ avec une probabilité de 1/2 et $S_1 = S_0 - 1$ avec une probabilité aussi de 1/2. Même chose s'applique pour S_2: $S_2 = S_1 + 1$ avec une probabilité de 1/2 et $S_2 = S_1 - 1$ avec une probabilité aussi de 1/2. les états seront: $\{\ldots, S_0 - n, S_0 - (n-1), \ldots, S_0, S_0 + 1, \ldots\}$
2. Identifier la probabilité de transition entre les différents états de S_n. $P(S_n, S_{n+1}) = 1/2$. $P(S_n, S_{n-1}) = 1/2$
3. Déduire que S_n est une chaine de Markov. Identifier sa matrice de transitions. Le fait de transiter de l'état S_n vers S_{n+1} ne dépend que de l'état S_n d'où c'est une chaine de markov

Exercice 3. *Loi de Probabilité de trajectoire et de X_n. .*
Soit le diagramme de transitions suivant où toutes les probabilités de transitions sont égales à 1/2.



- Donner les probabilités de trajectoires suivants : (X0=0, X1=0, X2=1, X3=0, X4=0) et (X0=0, X1=1, X2=2, X3=3,X4=4). $P(X0 = 0, X1 = 0, X2 = 1, X3 = 0, X4 = 0) = P(0) * P(0,0) * P(0,1) * P(1,0) * P(0,0)$. Appliquer numériquement. $P(X0 = 0, X1 = 1, X2 = 2, X3 = 3, X4 = 4) = P(0) * P(0,1) * P(1,2) * P(2,3) * P(3,4)$

Exercice 4. *Stock de magasin. .*

Dans un magasin, on dispose d'un stock de pièces détachées. Des clients intéressés adressent des demandes pour voir des quantités de pièces détachées. On note par : X_n : quantité de pièces en stock, à l'instant n; q : la quantité de pièces fabriquées depuis l'instant n jusqu'à l'instant $n+1$; et D_n : la quantité de pièces demandées par les clients à l'instant n.

1. Donner l'expression de X_{n+1} en fonction de X_n; Solution: $X_{n+1} = X_n + q - D_{n+1}$.
2. Trouver une formule de la probabilité de transition $P(X_n, X_{n+1})$; Solution: ça va dépendre que de D_n car q est fixe; pour une valeur $D_{n+1} = k$ et nous allons avoir deux états successifs x; y satisfaisant : $y = x + q - k$. D'où: $P(X_{n+1} = y / X_n = x) = P(x, y) = P(D = k)$
3. Trouver une formule de la probabilité de transition $P(X_n, 0)$ où $X_n \neq 0$. Solution : Pour ne plus avoir de pièce dans le stock ceci exige que la demande dépasse l'existant à n et ce qui est produit de n à $n+1$: si $X_n = x$ alors $P_{X_n, X_{n+1}}(x, 0) = P(D \geq x + q)$.
4. Question TP: Simuler X_n pour les deux cas : D_n est Poissonien, D_n est géométrique.

Exercice 5. *Fiabilité de Machines. .*

Une unité de production comprend 2 machines automatiques qui fonctionnent indépendamment l'une de l'autre. Chaque machine fonctionne toute la journée avec la probabilité p ou bien tombe en panne durant la journée avec probabilité $1-p$. L'unité de production possède 1 technicien travailleur de nuit qui peut réparer une machine tombée en panne et la remettre en état de marche pour le lendemain. En revanche, le technicien ne peut réparer qu'une et une seule machine par nuit. On souhaite comprendre le comportement du processus $(X_n)_{n \geq 1}$, où X_n représente le nombre de machines en panne au matin du n^{me} jour.

- Identifier la matrice de transitions de la chaine de Markov représentée par $(X_n)_{n \geq 1}$. Solution: états=$\{0, 1\}$. Il est impossible d'avoir plus d'une machine en panne en une matinée. $P(0,0)$=aucune machine n'a tombé en panne ou bien une seule machine est tombée en panne=$p^2 + 2p(1-p)$. $P(0,1)$=il faut que les deux machines tombent en panne=$(1-p)^2$. $P(1,0)$=la machine fiable ne doit pas tomber en panne=p. $P(1,1)$=la machine fiable doit tomber en panne=$1-p$.

- On considère le cas où: $p = 0.9$. On suppose que dans le premier jour, aucune machine n'est en panne. Identifier le vecteur des probabilités initiales π_1 ; Solution: Application numérique.

- Calculer π_2. Solution: Application numérique.

Exercice 6. *Crédit Bancaire. .*

On suppose qu'un bénéficiaire, qui investie de l'argent empruntée dans une micro entreprise, sera en mesure de rembourser son emprunt (et choisira de le rembourser effectivement) avec une probabilité α alors qu'il fera défaut avec une probabilité $1 - \alpha$. En cas de défaut, il redevient simplement demandeur durant la période suivante. Comme demandeur, on suppose qu'il a une probabilité γ de se voir attribué un prêt et une probabilité $1 - \gamma$ de se le voir refusé.

1. Identifier les états par lesquels passe un chef d'entreprise vis à vis ce crédit bancaire. Solution: états=D,B. Demandeur ou bénéficiaire.

2. Identifier la matrice et le graphe de transitions stochastiques montrant les états de ce chef d'entreprise. Solution: P(D,D)=$1 - \gamma$, P(D,B)=γ, P(B,B)=α, P(B,D)=$1 - \alpha$.

3. Calculer la probabilité qu'un bénéficiaire à la première période reste bénéficiaire pendant 2 périodes puis redevienne demandeur et le reste pendant 2 périodes avant de redevenir bénéficiaire. Solution : si B: état bénéficiaire, D: état demandeur. $P(B, B, D, D, B) = \pi_0(B) * P_{X0,X1}(B, B) * P_{X1,X2}(B, D)) * P_{X2,X3}(D, D) * P_{X3,X4}(D, B)$