Logique Temporelle

Cours de master M1 GLSD

2017-2018

L. Kahloul

Plan

- Logique: C’est quoi, éléments, syntaxe, sémantique;
- Types: Propositionnelles, des prédicats (1er ordre), limites des ces logique;
- Logique temporelle (LT): quoi de neuf?, syntaxe sémantique;
- Classes de LT: LTL, CTL*, CTL

La logique (informellement)

- Un langage pour la spécification et la représentation des connaissances
- Un langage= alphabet, mots, règles pour former des phrases (formules bien formées: **syntaxe**)
- Un langage formel: Syntaxe+Sémantique (les deux formellement définies)
- Classes : logique propositionnelle, logique de prédicats, logiques modales,…

Logique des Propositions

- Langage :

  Mots de base = variables propositionnelle V={P, Q, R, …}, connecteurs {¬, ∧, ∨}, parenthèse {(,)}

- Syntaxe: **règles pour former** les formules appartenant à LP, exemple : (P∧Q) est une formule dans LP

$$\varphi ::= \varphi \vee \varphi \mid \varphi \wedge \varphi \mid \neg\varphi \mid p$$

- Sémantique : définition **d'un modèle** M. Un modèle est un couple (D, π), où D est un domaine, et π est une application (interprétation) qui associe à chaque variable propositionnelle une valeur dans D.

  Pour LP:

  D={0,1}

  π:V→D

Logique des Propositions

- Une formule φ est dite satisfaite dans un modèle M, et on note ça par $M \models \varphi$ ssi φ est évaluée à 1 dans M

- φ est valide (tautologie) ssi elle est satisfaite dans tous les modèles

- φ est une antilogie (contradiction) ssi aucun modèle M ne satisfait φ

Une théorie est un ensemble de formules. On reprend les mêmes remarques pour une théorie

Logique des Prédicats

- **Une extension de la logique des propositionnelle:**

  1) les propositions ne sont plus des variables mais des fonctions avec arguments, donc des Prédicats

  2) introduire des constantes, des variables et des fonctions non propositionnelles

  3) introduire des quantificateurs sur les variables non propositionnelles

- **Appelé aussi Logique d'ordre 1: les prédicats peuvent porter seulement sur des « variables ou des fonctions » non propositionnelles.**

Logique des Prédicats

- Langage :

Partie fixe:

connecteurs {$\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\Leftrightarrow$, $\Rightarrow$},

parenthèse {(,)}

Quantificateurs={$\forall$, $\exists$}

Partie variable:

Un ensemble de constantes C={a, b, c, …}

Un ensemble de variables V={x,y,…}

Un ensemble de fonctions F={*f1, f2*, …}

Un ensemble de Prédicats P={P1, P2, …}

Ces deux logiques sont elles suffisante?

On peut faire avec :

- Exprime des propriétés sur l'instant. exemple :

r : feu rouge allumé

o : feu orange allumé

v : feu vert allumé

$r \wedge o \wedge v =$  , $\neg r \wedge \neg o \wedge v =$  ,

$r \wedge \neg o \wedge \neg v =$  , $\neg r \wedge \neg o \wedge \neg v =$  .

On ne pas peut faire avec !!!!!!

Comment dire que  précède  ?

Comment dire que le système ne reste pas toujours sur  ?

$\Rightarrow$ besoin de faire apparaître le temps

Introduction : besoin d'une LT

1) **Logique classique + Opérateur dédiés au temps (Opérateurs temporels)**

2) **Opérateurs temporels:** permettant d'exprimer l'évolution d'un système au cours du temps, tels que : ***toujours, jusqu'à, fatalement*** . . . . Associent **une valeur de vérité non pas à un état**, mais à **une séquence d'états**, représentant l'évolution d'un système au cours du temps

3) **Deux sortes d'opérateurs : Connecteur temporels + quantificateurs de chemins**

4) **Classes de logiques temporelles**:
   - Les logiques arborescentes (CTL*,CTL).
   - Les logiques linéaires (LTL).

Logique Temporelle
connecteurs et quantificateurs

Les connecteurs :

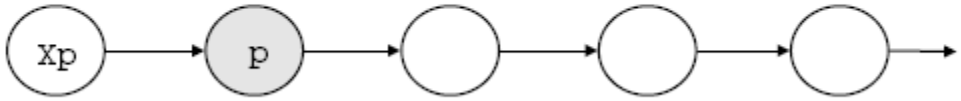
- **Expriment une propriété sur un seul chemin: suite d'événements attendus sur un seul chemin**
- **4 connecterus sont définis : X, F, G, U**

Les quantificateurs:

- **Exprime une propriété sur un *dépliage* (probablement plusieurs chemins à partir d'un certain état)**
- **2 quantificateurs: A, E**

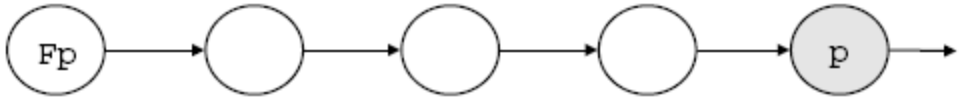
Logique Temporelle
connecteurs temporelles

Opérateur **X** "next"



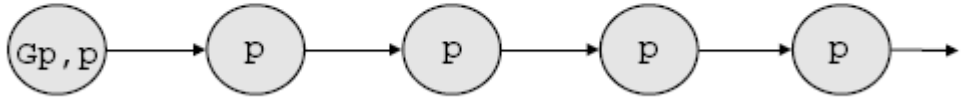
p serait vrai dans l'état suivant

Opérateur **F** "sometimes in the future"

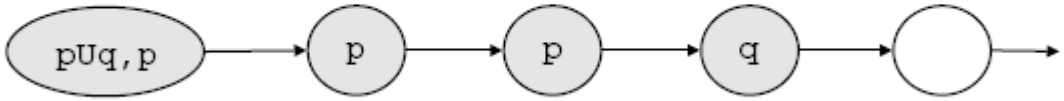


p serait vrai dans un état futur

Opérateur **G** "always in the future"



Opérateur **U** "p true until q true"



Remarque:

- **si φ_2 est vrai à un instant donc $\varphi_1 U \varphi_2$ l'est aussi**

- **Si $\varphi_1 U \varphi_2$ est vrai donc on doit avoir dans le futur φ_2 vrai aussi**

- $\alpha \; U \; \beta = \beta \vee (\alpha \wedge X(\alpha \; U \; \beta))$.

Logique Temporelle exemples

Que signifie les formules suivantes :

- $F(x=0)$,
- $G\neg(x=0)$,
- $G(p \rightarrow Fq)$,
- $(init \wedge précond) \rightarrow F(end \wedge poscond)$

Logique temporelle quantificateurs

- Les connecteurs temporelle expriment des propriétés sur un seul chemin, donc un seul futur

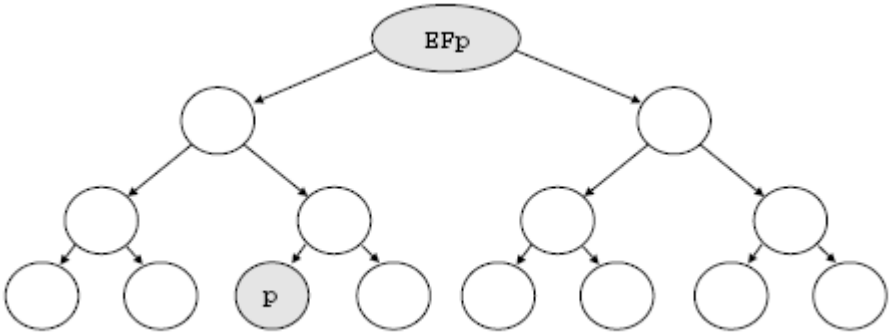
- Mais en réalité, on peut avoir plusieurs exécutions possibles: on introduit deux quantificateurs:

A: tous les chemins futurs vérifient la propriété

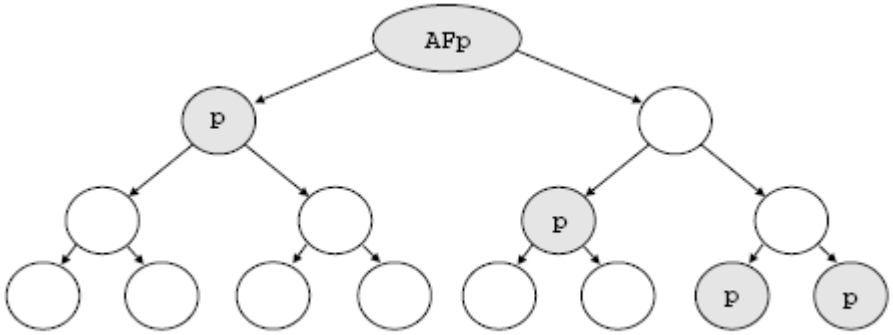
E: certains chemins futurs vérifient la propriété

Logiques Temporelle
exemple 2

EF*p* : *p* vrai dans au moins un état

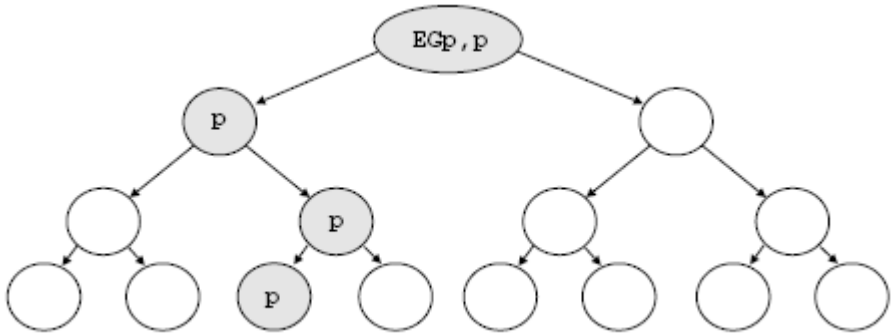


AF*p* : *p* atteignable par tous les chemins

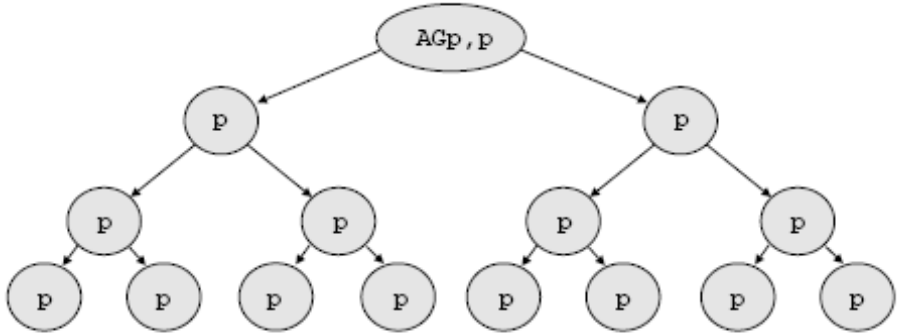


Logique temporelle
exemple 2

EG*p* : il existe un chemin avec *p* toujours vrai



AG*p* : *p* est toujours vrai



Test

- C’est quoi une logique? Pourquoi la logique?
- Pourquoi utiliser la logique temporelle?
- C’est quoi la nouveauté dans cette logique?
- C’est quoi le modèle de cette logique et montrer la sémantique de ses formules?
- Quelles sont les différentes classes de cette logique?

Logique LTL

- Une logique temporelle dite linéaire

- **Seulement A, mais pas de quantificateur E**

Exemple : **AFG**p dans LTL

EFp pas dans LTL

Logique LTL
sémantique sur un seul chemin

- Les formules de LTL :

$$\varphi ::= p \in AP \mid \neg\varphi \mid \varphi \vee \varphi \mid \varphi \wedge \varphi \mid \mathbf{X}\varphi \mid \mathbf{F}\varphi \mid \mathbf{G}\varphi \mid \varphi \mathbf{U} \varphi$$

- Le **modèle d'interprétation** des formules LTL est un **chemin d'exécution** : σ (suite d'états). $\sigma = e_0, e_1, e_2, \ldots$

- On note par $(\sigma, i) \models \varphi$ le fait que φ est satisfaite dans l'état **i** appartenant au chemin σ

Logique LTL
sémantique sur un seul chemin

-La relation de satisfaction de formules LTL $\sigma \models \varphi$ est définie inductivement, comme suit :

- **$\sigma \models p$ ssi p est satisfaite dans l'état e_0 et on note ça par $(\sigma,0) \models p$**
- **$\sigma \models \varphi_1 \wedge \varphi_2$ ssi $(\sigma,0) \models \varphi_1$ et $(\sigma,0) \models \varphi_2$**
- **$\sigma \models \varphi_1 \vee \varphi_2$ ssi $(\sigma,0) \models \varphi_1$ ou $(\sigma,0) \models \varphi_2$**
- **$\sigma \models X\varphi$ ssi $(\sigma,1) \models \varphi$**
- **$\sigma \models F\ \varphi$ ssi il existe un k>=0 telque $(\sigma,k) \models \varphi$**
- **$\sigma \models G\ \varphi$ ssi pour tout k>=0 on a $(\sigma,k) \models \varphi$**
- **$\sigma \models \varphi_1 U \varphi_2$ ssi il existe k>=0 avec $(\sigma,k) \models \varphi_2$ et pour tout j: 0<=j<k : $(\sigma,j) \models \varphi_1$**

Logique LTL
quelques équivalences

- $\mathbf{F}\varphi \equiv \neg\mathbf{G}\neg\varphi$
- $\mathbf{F}\varphi \equiv \mathit{true}\mathbf{U}\varphi$
- $\neg\mathbf{F}\varphi \equiv \mathbf{G}\neg\varphi$
- $\neg\mathbf{X}\varphi \equiv \mathbf{X}\neg\varphi$

?

LTL
sémantique sur une structure de Kripke

- Les formules concernent **un chemin** ou **plusieurs** qui partent d'un certain état s :

$$\varphi_p ::= p \in AP$$
$$\mid \neg\varphi_p \mid \varphi_p \vee \varphi_p \mid \varphi_p \wedge \varphi_p \mid \mathbf{X}\varphi_p \mid \mathbf{F}\varphi_p \mid \mathbf{G}\varphi_p \mid \varphi_p \mathbf{U} \varphi_p$$
$$\varphi_s ::= \mathbf{A}\varphi_p$$

- Le modèle est un couple ***(M,s)*** où *M* est une structure de Kripke et **s** un état dans cette structure

- Satisfaction

. $\mathcal{M}, s \models_s \mathbf{A}\varphi_p$ ssi tous les chemins σ partant de s vérifient $\sigma \models \varphi_p$

. $\sigma \models \varphi_p$ défini comme avant

- Finalement $\mathcal{M} \models \varphi$ ssi $\mathcal{M}, s_0 \models_s \varphi$

LTL
exemples

$\neg \mathbf{G}(r \wedge \neg o \wedge \neg v)$: le système ne reste pas tout le temps  .

$\mathbf{G}((\neg r \wedge o \wedge \neg v) \rightarrow \mathbf{X}(r \wedge \neg o \wedge \neg v))$:  est tjs imm. suivi de  .

$\mathbf{GF}(\neg r \wedge \neg o \wedge v)$: le système passe infiniment souvent par  .